Capitolo 1

Funzioni

1.1 Concetti preliminari

Definizione. Dati due insiemi A e B, si chiama *funzione* f da A a B, e la si indica col simbolo

$$f : A \longrightarrow B,$$

una corrispondenza che associa ad ogni elemento $x \in A$ un *unico* elemento $y = f(x) \in B$.

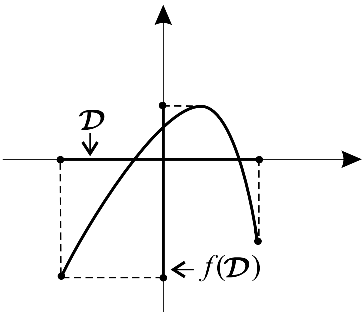
La corrispondenza è indicata da $y = f(x)$ o da $x \mapsto f(x)$.

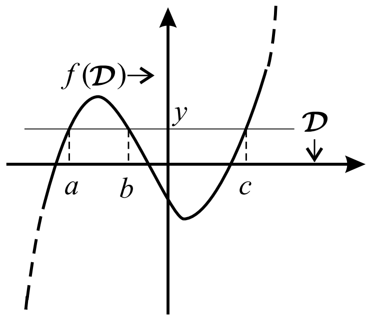
L'insieme A è detto *dominio* della funzione f, e gli elementi $f(x)$ sono detti *valori di* f. L'insieme di tutti i valori di f è detto *codominio* di f. L'elemento $f(x) \in B$ che corrisponde a x si chiama *immagine* di x; x è detto *controimmagine* di $f(x)$. Se A_1 è un sottoinsieme di A, l'insieme $\{y \in B : \ y = f(x), x \in A_1\}$ si indica col simbolo $f(A_1)$; in particolare, il codominio di f coincide con $f(A)$.

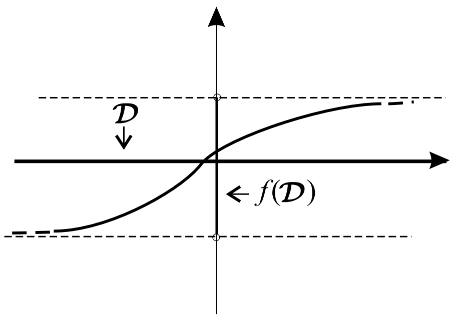
Nel seguito considereremo solo il caso in cui il dominio di f è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, e $B = \mathbb{R}$: in questo caso la funzione è detta *reale di variabile reale*. Sia $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; ad f è possibile associare un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, detto *grafico* di f e definito come segue:

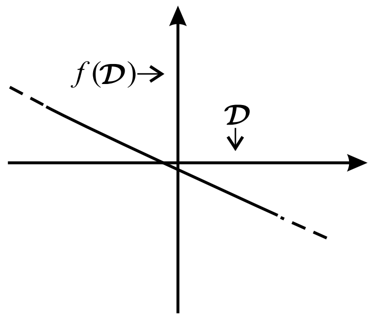
$$\mathrm{gr}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathcal{D}, \ y = f(x)\}.$$

Le seguenti figure rappresentano grafici di funzioni reali;









si osservi che

- il dominio $\mathcal{D}$ è la proiezione dei punti del grafico sull'asse delle x;
- il codominio di f, $f(\mathcal{D})$ (indicato anche col simbolo $Im(f)$), è la proiezione dei punti del grafico sull'asse delle y

(il dominio e il codominio sono in grassetto nei disegni).

L'insieme $f(\mathcal{D})$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e, nel caso particolare in cui coincida con $\mathbb{R}$, la funzioni è detta *suriettiva*, come accade per le funzione rappresentate nel secondo e nel quarto grafico. La suriettività assicura che ogni $y \in \mathbb{R}$ abbia almeno una controimmagine in $\mathcal{D}$, cioè che esista un elemento

x di $\mathcal{D}$ per cui vale l'eguaglianza $y = f(x)$; ad esempio, nel secondo grafico, i punti a, b e c sono controimmagini di y.

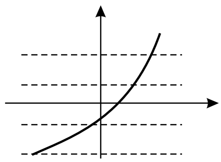
Un elemento di $f(\mathcal{D})$, come appena visto, può avere più di una controimmagine; se accade che essa sia sempre unica, la funzione di dice iniettiva.

Definizione. Una funzione $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è *iniettiva* se

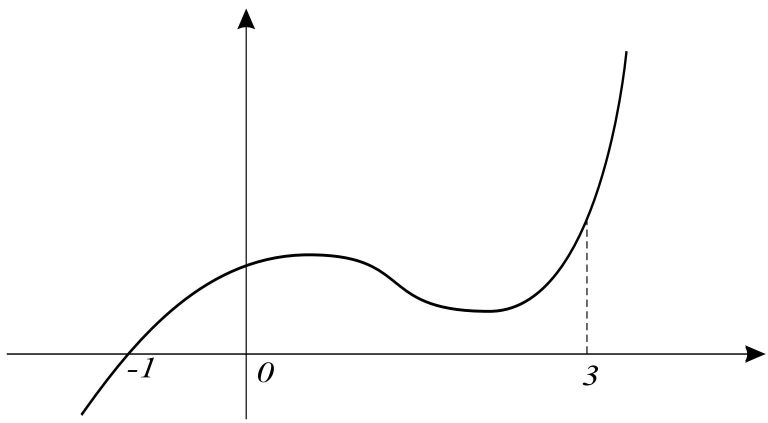
$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D},\ x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

In altra parole, a punti del dominio distinti corrispondono immagini $f(x_1)$ e $f(x_2)$ distinte.

Graficamente, l'iniettività di una funzione equivale al fatto che una qualsiasi retta parallela all'asse delle ascisse o non ne interseca il grafico, oppure lo interseca in un solo punto (si veda il grafico della funzione rappresentata a fianco).



Osservazione. Se una funzione $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ non è iniettiva, è sempre possibile considerare dei sottoinsiemi $\mathcal{D}_1$ propriamente contenuti in $\mathcal{D}$ con la proprietà che la funzione $f : \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ sia iniettiva (tale funzione è chiamata *restrizione* di quella data al sottoinsieme $\mathcal{D}_1$, e la si indica col simbolo $f|_{\mathcal{D}_1}$). Ad esempio, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avente il seguente grafico



non è iniettiva, ma la sua restrizione a $(3, +\infty)$, oppure a $(-1, 0)$, è iniettiva.

Se $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione iniettiva, si può definire, a partire da f, una nuova funzione da $f(\mathcal{D})$ a $\mathcal{D}$ che associa ad ogni elemento di $f(\mathcal{D})$ la sua unica controimmagine tramite f. Tale funzione, chiamata *funzione inversa* di f, è indicata con f^{-1} ed è definita dalla legge

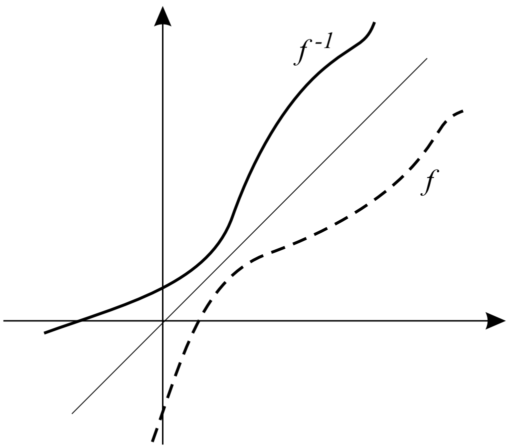
$$f^{-1} : f(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}, \qquad f^{-1}(x) = y, \qquad \text{dove} \qquad f(y) = x.$$

Una funzione f che ammette inversa viene dette *invertibile.*

Osservazione. Se f è iniettiva, e f^{-1} è la sua inversa, si verifica facilmente che

$$(a, b) \in \text{ gr } (f) \quad \text{se e solo se} \quad (b, a) \in \text{ gr } (f^{-1}).$$

Poiché due punti del tipo (a, b) e (b, a) sono simmetrici rispetto alla retta di equazione $y = x$, il grafico di f^{-1} risulta simmetrico al grafico di f rispetto alla retta $y = x$.



Date due funzioni $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$, se $f(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{B}$ è possibile definire una funzione da $\mathcal{D}$ a $\mathbb{R}$, detta *funzione composta* ed indicata con $g \circ f$, nel modo seguente:

$$g \circ f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Osservazioni. i. Se è soddisfatta anche la condizione $g(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{D}$, sono definite entrambe le funzioni: $g \circ f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f \circ g : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$; si osservi che tali funzioni sono in generale diverse, sia perché può essere $\mathcal{D} \neq \mathcal{B}$, sia perché, in generale, le leggi che definiscono sono diverse. Ad esempio, $f(x) = x + 1$:

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sono tali che esistono in $\mathbb{R}$ sia $g \circ f$ che $f \circ g$, e si ha: $(g \circ f)(x) = (x+1)^3$, e $(f \circ g)(x) = x^3 + 1$.

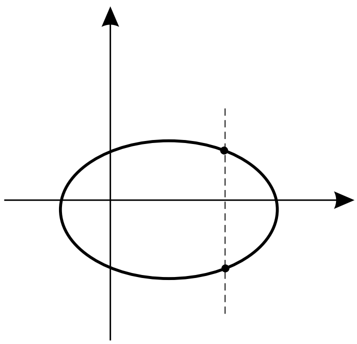
ii. Se $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ è invertibile, sono definite entrambe le funzioni $f^{-1} \circ f$ e $f \circ f^{-1}$ (le condizioni sui domini e sulle immagini sono sempre soddisfatte); si ha:

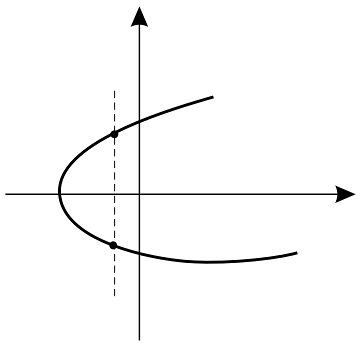
$$f^{-1} \circ f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}, \qquad (f^{-1} \circ f)(x) = x \qquad \forall x \in \mathcal{D},$$

e

$$f \circ f^{-1} : f(\mathcal{D}) \longrightarrow f(\mathcal{D}), \qquad (f \circ f^{-1})(x) = x \qquad \forall x \in f(\mathcal{D}).$$

Se ad ogni funzione reale è possibile associare un grafico, una linea qualsiasi nel piano non è, in generale, il grafico di una funzione: ad esempio, alle seguenti linee appartengono punti che hanno ascisse uguali e diverse ordinate e in tal caso l'eventuale funzione corrispondente assocerebbe allo stesso elemento del dominio più di una immagine.





Le seguenti linee sono invece grafici di funzioni

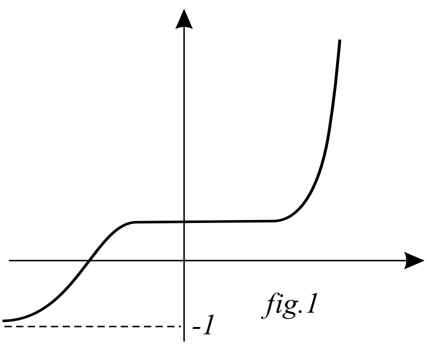


fig.1

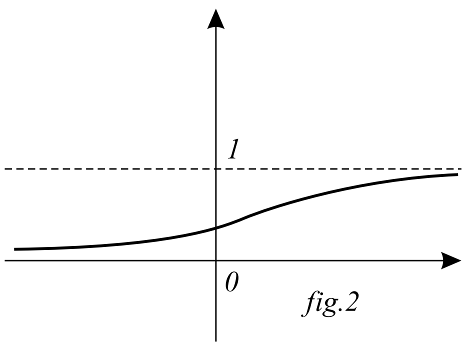


fig.2

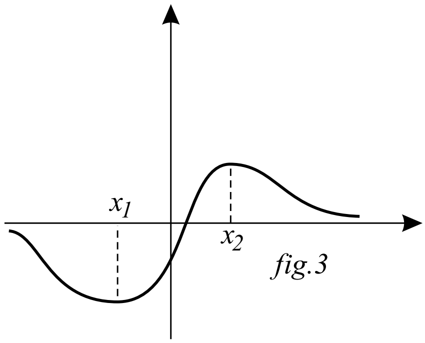


fig.3

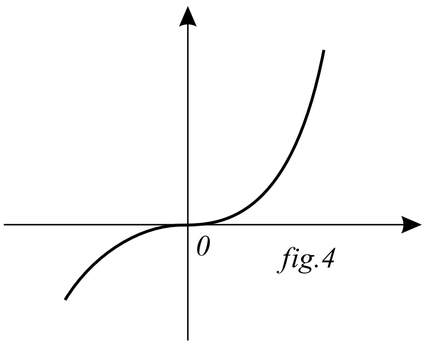


fig.4

I grafici riportati permettono di evidenziare alcune importanti caratteristiche delle funzioni che essi rappresentano.

1. Nel primo, nel secondo e nel quarto si vede che le ordinate dei punti non decrescono al crescere delle ascisse; le funzioni i cui grafici hanno questa caratteristica vengono dette crescenti. Più precisamente, diamo la seguente

Definizione. Si dice che la funzione $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ è *crescente* se

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D},\ x_1 < x_2, \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2);$$

si dice che f è *decrescente* se

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D},\ x_1 < x_2, \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

In particolare, f si dice *strettamente crescente* oppure *strettamente decrescente* nel caso valga sempre la diseguaglianza stretta.

(Le funzioni di fig.2 e fig.4 sono strettamente crescenti.) Funzioni reali crescenti o decrescenti vengono dette *monotone.*

2. Nel secondo grafico si vede che le ordinate dei punti sono tutte minori di 1 e maggiori di 0; in generale, le funzioni che soddisfano una proprietà di questo tipo vengono dette limitate:

Definizione. Una funzione $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice *limitata* se esistono due numeri reali M e N tali che

$$M \leq f(x) \leq N, \qquad \forall x \in \mathcal{D};$$

nel caso in cui le ordinate sono solo maggiori di M (o minori di N), allora f si dirà *limitata inferiormente* (*superiormente*).

Osservazione. La limitatezza di una funzione f equivale alla limitatezza dell'insieme $Im(f)$; infatti, si dice che

- un sottoinsieme non vuoto E di $\mathbb{R}$ è *limitato superiormente* se esiste $N \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq N$ per ogni $x \in E$ (N siffatto è detto *maggiorante* di E);

analogamente,

- un sottoinsieme non vuoto E di $\mathbb{R}$ è *limitato inferiormente* se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq M$ per ogni $x \in E$ (M siffatto è detto *minorante* di E).

Se E è limitato sia superiormente che inferiormente, si dice che E è *limitato.*
Ricordiamo inoltre che

- se E non ammette maggioranti si dice che è *illimitato superiormente*;

analogamente,

- se E non ammette minoranti si dice che è *illimitato inferiormente.*

Se E è illimitato superiormente oppure inferiormente, si dice che E è *illimitato.*

3. Nel terzo grafico si osserva che esistono punti con ordinata minima e punti con ordinata massima; diamo in proposito la seguente

Definizione. Una funzione $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ ha *massimo* se esiste un elemento $x_0 \in \mathcal{D}$ tale che

$$f(x) \leq f(x_0), \qquad \forall x \in \mathcal{D};$$

analogamente, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ ha *minimo* se esiste $x_1 \in \mathcal{D}$ tale che

$$f(x) \geq f(x_1), \qquad \forall x \in \mathcal{D}.$$

I valori di tali ordinate sono il *massimo* e il *minimo* dell'*insieme immagine* della funzione e si dicono *massimo* e *minimo* di f, mentre le relative ascisse sono dette *punti di massimo* e *punti di minimo.*

Confrontando i primi due grafici con il terzo, si osserva che non sempre una funzione ammette un massimo o un minimo. Infatti, l'immagine di una funzione reale è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e non sempre tali sottoinsiemi hanno massimo o minimo (ad esempio, gli insiemi $(-1, +\infty)$ e $(0, 1)$, che sono gli insiemi immagine delle prime due funzioni, non hanno né massimo né minimo).

Indichiamo con $\mathbb{R}^*$ l'*insieme ampliato dei numeri reali* definito da $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, dove si pone $-\infty < x < +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Una proprietà notevole dei numeri reali permette di affermare che ogni insieme E non vuoto di numeri reali possiede sempre in $\mathbb{R}^*$ un *estremo superiore* $L = \sup E$ ed un *estremo inferiore* $l = \inf E$, così definiti:

- se E è limitato superiormente (o inferiormente), L (l) è un numero reale definito dalle condizioni:
  i) $\forall x \in E$: $x \leq L$ $(x \geq l)$;
  ii) $\forall L' < L$ $(l' > l)$, $\exists x \in E: \quad x > L'$ $(x < l')$;

(in altre parole, L (l) è il minimo (massimo) dei maggioranti (minoranti) di E);

- se E è illimitato superiormente (o inferiormente), allora si pone $\sup E = +\infty$ $(\inf E = -\infty)$.

È quindi possibile definire l'estremo superiore e inferiore di una funzione reale $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, ponendo: $\sup f = \sup f(\mathcal{D})$ e $\inf f = \inf f(\mathcal{D})$.

<u>Osservazione</u>. Data $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, esistono *sempre* in $\mathbb{R}^*$ sia $\sup f$ che $\inf f$; in particolare, $\sup f$, $\inf f$, risulteranno reali finiti (cioè in $\mathbb{R}$) se f è superiormente, inferiormente limitata, reali infiniti (cioè $\pm\infty$) se f è illimitata superiormente e inferiormente. Ad esempio, per la funzione avente il grafico della fig.1 si ha $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -1$, invece per quella relativa alla fig.2 si ha $\sup f = 1$ e $\inf f = 0$; in entrambi i casi gli estremi, anche quando sono reali finiti, non appartengono all'immagine della funzione e quindi tali funzioni non hanno massimo e minimo. Nei casi in cui $\sup f$, $\inf f$ appartengano all'immagine, essi sono il massimo, il minimo di f e si indicano, rispettivamente, con $\max f$, $\min f$.

4. Il grafico della fig.4 rappresenta, come già fatto osservare, una funzione strettamente crescente, ma il modo in cui essa cresce è differente a seconda che si consideri la parte di linea prima dell'origine degli assi o quella ad essa successiva; la prima è detta *linea concava*, la seconda *linea convessa* e l'origine, che è il punto in cui cambia la forma, è detto *punto di flesso* della funzione (per una definizione precisa di tali concetti rinviamo alle applicazioni del calcolo differenziale allo studio del grafico di una funzione).

Gli argomenti che verranno presentati nei capitoli successivi permetteranno, data una funzione $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, di individuarne le proprietà e quindi di tracciarne un grafico qualitativo. Di alcune funzioni particolari (che chiameremo *elementari*) è però utile conoscere subito il grafico e le proprietà che se ne possono dedurre, al fine di disporre di un buon numero di esempi sui quali illustrare la teoria che verrà via via sviluppata, rinviando ad allora la loro giustificazione.

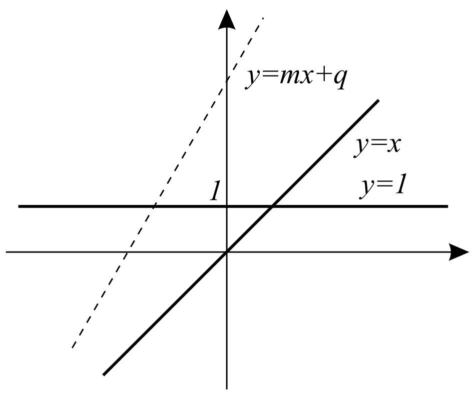
1.2 Funzione potenza

Le *funzioni potenza* con esponente intero non negativo $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sono definite come segue:

$$x \mapsto f_n(x) = x^n,$$

con $n \in \mathbb{N}$.

Per $n = 0$ il grafico è una retta orizzontale e passante per $(0, 1)$, per $n = 1$ è la bisettrice del primo e terzo quadrante; tali funzioni sono casi particolari delle funzioni $x \mapsto mx + q$ i cui grafici sono tutte le rette del piano cartesiano ad eccezione di quelle verticali.



Consideriamo il caso $n \geq 2$; il grafico qualitativo di queste funzioni è sostanzialmente diverso a seconda che n sia dispari oppure pari, come si deduce dalle figure 5 e 6

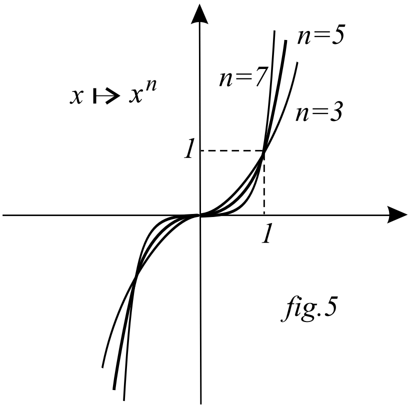


fig.5

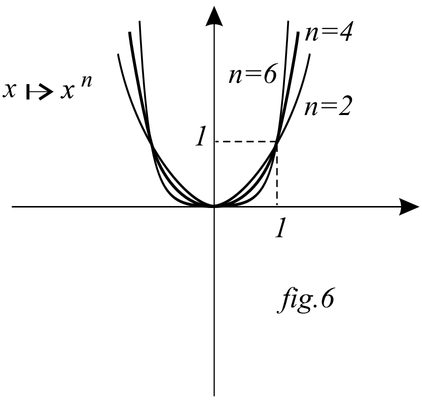


fig.6

Si osservi che

- nel caso di n *dispari*, le f_n sono strettamente crescenti, concave in $(-\infty, 0]$, convesse in $[0, +\infty)$ e presentano un punto di flesso in 0; gli estremi superiore e inferiore sono $+\infty$ e $-\infty$, in quanto le funzioni sono illimitate sia superiormente che inferiormente. Inoltre, i grafici sono simmetrici rispetto all'origine degli assi: infatti, $f_n(-x) = -f_n(x)$; ogni funzione che soddisfi questa condizione è detta *dispari*.
- Nel caso n *pari*, le f_n sono sempre convesse, strettamente decrescenti in $(-\infty, 0]$, strettamente crescenti in $[0, +\infty)$ e presentano in 0 un punto di minimo, mentre non hanno massimo ma un estremo superiore $+\infty$ in quanto illimitate superiormente. Inoltre, i loro grafici sono simmetrici rispetto all'asse y : infatti, $f_n(-x) = f_n(x)$; ogni funzione che soddisfi questa condizione è detta *pari*.

Per quanto riguarda l'invertibilità delle funzioni potenza, osserviamo quanto segue:

- le funzioni f_n con n dispari, essendo strettamente crescenti nel loro dominio, sono invertibili e le loro inverse sono così definite:

$$(f_n)^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{1/n}.$$

- le funzioni f_n con n pari non hanno inversa, in quanto le rette parallele all'asse x e che giacciono nel semipiano di equazione $y > 0$ tagliano i loro grafici in 2 punti. È però possibile restringere queste funzioni ad un sottoinsieme del loro dominio sul quale esse sono strettamente monotone, in modo da poter così definire le funzioni inverse di tali restrizioni; se, ad esempio, si sceglie la restrizione all'insieme $[0, +\infty)$ le funzioni inverse sono:

$$(f_n)^{-1} : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty), \qquad x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

e i loro grafici sono del tipo riportato in fig.8.

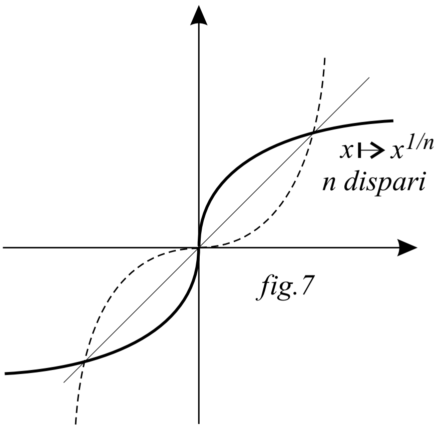


fig.7

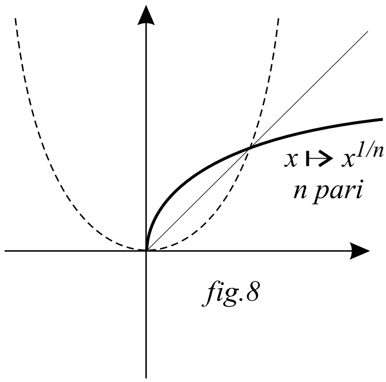


fig.8

Nel caso di un esponente intero negativo si hanno le funzioni potenza $f_{-n} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, così definite:

$$x \mapsto x^{-n} = \frac{1}{x^n};$$

i grafici di tali funzioni sono rappresentati in fig.9, per n pari, e in fig.10, per n dispari (in particolare il grafico della funzione f_{-1} è detto *iperbole equilate-*

ra).

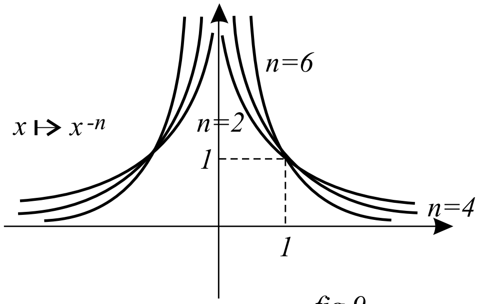


fig.9

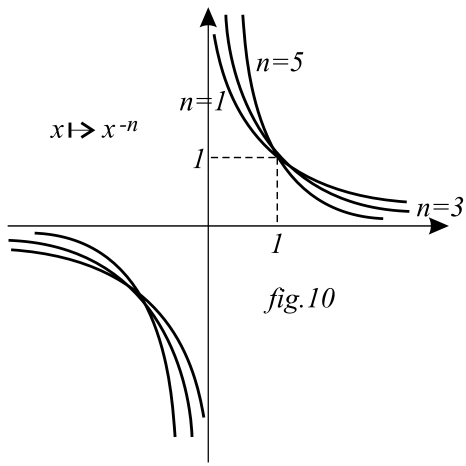


fig.10

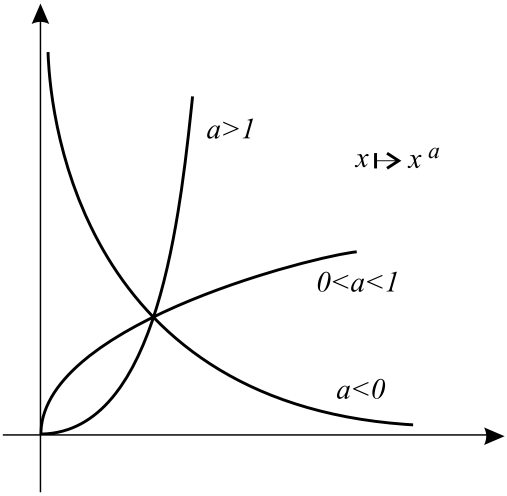
Si osservi che, quando x assume valori che "tendono" a $+\infty$ o $-\infty$, i grafici si "avvicinano" via via all'asse x, invece, quando x "tende" a 0, i grafici si "avvicinano" all'asse y (il significato preciso da attribuire a "tendere" e "avvicinarsi" sarà definito in seguito nel capitolo dedicato ai limiti). In tali situazione, le rette a cui i grafici si avvicinano si dicono, rispettivamente, *asintoto orizzontale* e *verticale* della funzione. Dai grafici si vede che nessuna delle f_{-n} è monotona; tuttavia, nel caso n dispari, le funzioni sono iniettive e quindi invertibili, invece nel caso pari si possono operare, ad esempio, le restrizioni a $(0, +\infty)$ che risultano invertibili. Si ottengono quindi le funzioni:

$$x \mapsto (f_{-n})^{-1}(x) = x^{-1/n}$$

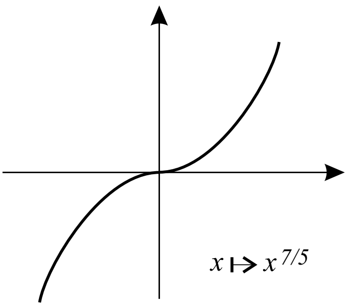
definite su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, se n è dispari, e su $(0, +\infty)$, se n è pari.

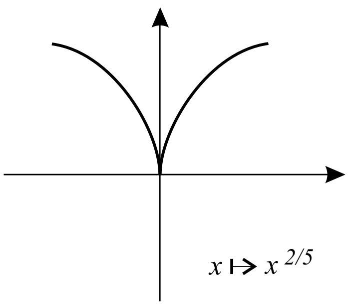
Poiché, se la base è positiva, si può definire la potenza anche per qualsiasi esponente reale a, è possibile definire le funzioni potenza: $x \mapsto f_a(x) = x^a$, con dominio $(0, +\infty)$ per a negativo, e dominio $[0, +\infty)$ per a positivo. I grafici di tali funzioni sono riportati nella figura seguente, nei casi: $a > 1,\ 0 < a < 1$

e $a < 0$.



<u>Osservazione</u>. Nel caso $a = \pm\frac{m}{n}$, con n dispari, le relative funzioni potenza possono essere prolungate all'asse x negativo, operando una simmetria del grafico rispetto all'origine, se m è dispari, oppure una simmetria rispetto all'asse y, se m è pari. Ad esempio, le funzioni $x \mapsto x^{\frac{7}{5}}$ e $x \mapsto x^{\frac{2}{5}}$ hanno i seguenti grafici:



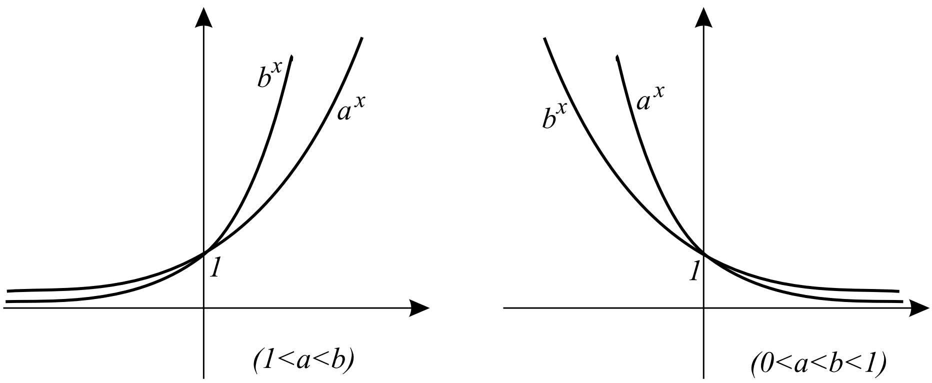


1.3 Funzioni esponenziali e logaritmiche

Se nelle potenze con esponente reale si considera costante la base e variabile l'esponente si ottengono le *funzioni* dette *esponenziali*, che risultano quindi così definite:

$$f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f_a(x) = a^x,$$

con a reale positivo e diverso da 1.



I grafici riportati sopra mostrano che tali funzioni sono sempre convesse, strettamente crescenti se $a > 1$, e strettamente decrescenti se $0 < a < 1$. Hanno come estremo superiore $+\infty$ (sono illimitate superiormente) e come estremo inferiore 0; poiché 0 non appartiene all'insieme immagine delle f_a (infatti $a^x > 0$ per ogni x), le funzioni esponenziali non hanno minimo. L'asse x è un asintoto orizzontale delle funzioni f_a, per $x \to -\infty$, se $a > 1$, e per $x \to +\infty$, se $0 < a < 1$. La stretta monotonia delle funzioni esponenziali permette di definire le loro inverse, note come *funzioni logaritmiche*:

$$f_a^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \log_a x.$$

Il simbolo $\log_a x$ indica quindi l'esponente a cui deve essere elevata la base a, positiva e diversa da 1, per ottenere x; i grafici di tali funzioni, ottenuti da quelli delle f_a per simmetria rispetto alla retta di equazione $y = x$, sono illustrati nelle figure 11 e 12.

Poiché le funzioni esponenziali e logaritmiche sono le une inverse delle altre, si hanno le seguenti identità:

$$x = \log_a a^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}; \qquad\qquad x = a^{\log_a x}, \quad \forall x > 0.$$

Le funzioni logaritmiche soddisfano le seguenti importanti proprietà, la cui dimostrazione è una semplice conseguenza delle proprietà delle potenze e del fatto che tali funzioni sono le inverse delle esponenziali: per ogni $x, y > 0$, per ogni $a > 0$, $a \neq 1$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y; \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y; \quad \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x.$$

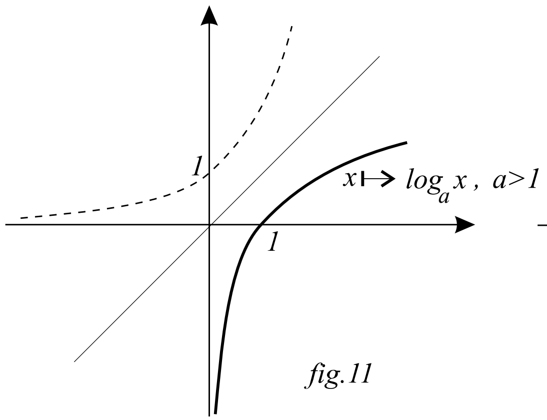


fig.11

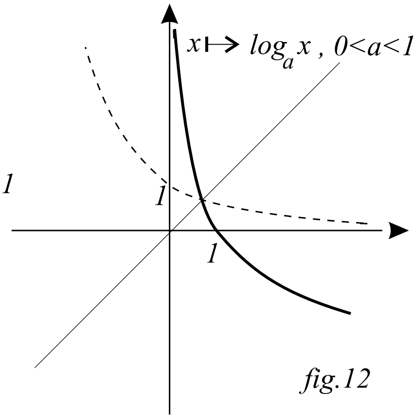


fig.12

Nell'analisi matematica, per ragioni che saranno chiarite in seguito, è usato come base per esponenziali e logaritmi il numero irrazionale $e = 2,718281...$, detto numero di Nepero; in tale base il logaritmo si indica con il simbolo ln, e viene detto logaritmo naturale. È comunque sempre possibile trasformare un esponenziale o un logaritmo, dato in una base diversa, in uno equivalente nella base e, usando le seguenti formule:

$$a^x = e^{x \ln a}; \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}\cdot$$

1.4 Funzioni periodiche

Dato un qualsiasi $x \in \mathbb{R}$, è sempre possibile determinare il più grande intero minore o uguale a x; tale intero, detto *parte intera* di x e indicato con il simbolo $[\![x]\!]$, per definizione soddisfa le relazioni: $[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1$. Ad esempio si ha: $[\![2.5]\!] = 2$, $[\![3/7]\!] = 0$, $[\![-2.7]\!] = -3$, $[\![-4/7]\!] = -1$. Definiamo *funzione parte intera* la funzione: $x \mapsto [\![x]\!]$ con dominio tutto $\mathbb{R}$. Sull'intervallo $[0,1)$ è costante e vale 0; inoltre, poiché $[\![x+k]\!] = [\![x]\!] + k$, per ogni k intero, tale funzione è costante e vale k su ogni intervallo $[k, k+1)$. Il suo grafico ha quindi un andamento a gradini come rappresentato nella fig.13; si vede che in ogni punto dell'asse x di ascissa intera la funzione ha un "salto" di una unità, passando da valori minori a valori maggiori dell'intero, ovvero la funzione parte intera ha una discontinuità in ogni elemento intero del dominio (nei prossimi capitoli verranno presentati gli strumenti per definire in modo rigoroso la nozione di discontinuità di una funzione).

Definiamo *funzione mantissa* la funzione: $x \mapsto \{x\} = x - [\![x]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$; per la definizione data di $[\![x]\!]$, la funzione mantissa soddisfa, per ogni x, la seguente uguaglianza: $\{x + k\} = \{x\}$, qualunque sia l'intero k. Diamo la seguente

Definizione. Una funzione $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ è *periodica* se esiste un numero reale positivo T tale che

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall x \in \mathcal{D},$$

ed esiste un minimo valore positivo per il quale si verifica l'uguaglianza precedente; a tale valore si attribuisce il nome di *periodo* della funzione.

Ne consegue che la funzione mantissa è una funzione periodica con periodo uguale ad 1 e il suo grafico (fig.14) si può quindi ottenere riportando infinite volte per traslazione il grafico di tale funzione nell'intervallo $[0, 1)$; esso è la restrizione, a questo intervallo, della bisettrice del primo e terzo quadrante in quanto $\{x\} = x$, se $x \in [0, 1)$. Osservando il grafico, si nota che la funzione mantissa è discontinua in ogni punto di ascissa intera, è limitata (infatti, $0 \leq \{x\} < 1$), e ha minimo uguale a 0, ma non ha massimo poiché non assume mai il valore 1 che è il suo estremo superiore.

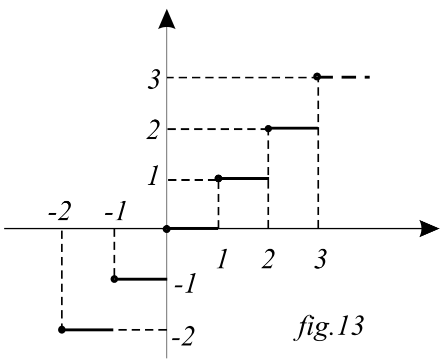


fig.13

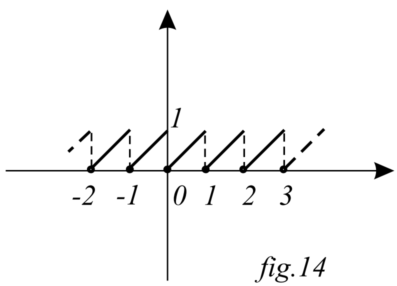


fig.14

Importanti funzioni periodiche, di periodo 2π, sono le funzioni *seno* e *coseno*; i grafici che le rappresentano sono riportati, rispettivamente, nelle seguenti figure 15 e 16

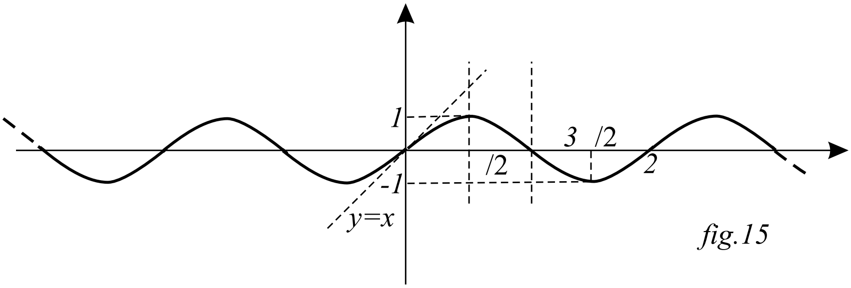


fig.15

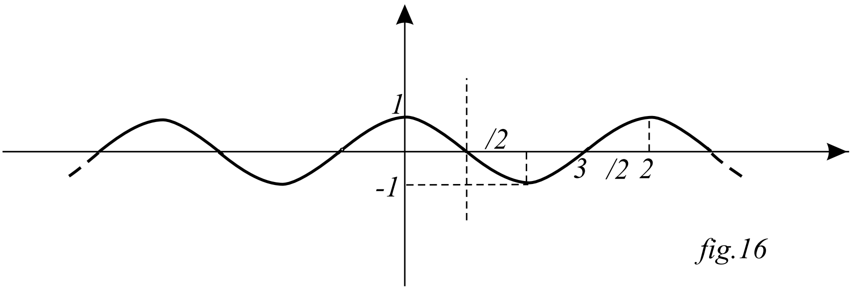


fig.16

Il grafico della funzione seno mostra che la funzione:

i) è dispari, ovvero $\sin(-x) = -\sin x$;

ii) si annulla in 0 e π, nell'intervallo $[0, 2\pi)$, e quindi in tutti i punti che si ottengono traslando questi di multipli interi del periodo; tali punti, detti *zeri del seno*, sono tutti e soli del tipo $x_k = k\pi$, con k intero qualsiasi;

iii) ha massimo 1 e minimo -1 assunti, rispettivamente, in $\pi/2$ e $3\pi/2$, nel periodo $[0, 2\pi)$, e quindi in tutti i punti che si ottengono traslando questi di multipli interi del periodo: $x_k = \pi/2 + k(2\pi)$ e $x_k = 3\pi/2 + k(2\pi)$, con k intero qualsiasi;

iv) è concava in $[0, \pi]$ e quindi in tutti gli intervalli che si ottengono traslandolo di multipli interi di 2π; è invece convessa in $[\pi, 2\pi]$ e quindi in tutti gli intervalli che si ottengono traslandolo di multipli interi di 2π; ne consegue che tutti i punti $x_k = k\pi$ sono punti di *flesso*;

v) è strettamente decrescente in $[\pi/2, 3\pi/2]$ e quindi in tutti gli intervalli che si ottengono traslandolo di multipli interi di 2π; nei restanti intervalli è strettamente crescente;

vi) ha tangente di equazione $y = x$ nell'origine.

Si osservi, inoltre, che il grafico è simmetrico rispetto alla retta $x = \pi/2$; quindi in tutti punti α e β simmetrici rispetto a $\pi/2$, ovvero tali che $\alpha+\beta = \pi$, si ha: $\sin\alpha = \sin\beta = \sin(\pi - \alpha)$. Considerando invece il punto del piano $(\pi, 0)$, si osservi che il grafico è simmetrico rispetto a tale punto: in tutti i punti α e β simmetrici rispetto a π, ovvero tali che $\alpha + \beta = 2\pi$, si ha: $\sin\alpha = -\sin\beta = -\sin(2\pi - \alpha)$.

Il grafico della funzione coseno mostra che la funzione:

i) è pari, ovvero $\cos(-x) = \cos x$;

ii) si annulla in $\pi/2$ e $3\pi/2$, nell'intervallo $[0, 2\pi)$, e quindi in tutti i punti che si ottengono traslando questi di multipli interi del periodo; tali punti, detti *zeri del coseno*, sono tutti e soli del tipo $x_k = \pi/2 + k\pi$, con k intero qualsiasi;

iii) ha massimo 1 e minimo -1 assunti, rispettivamente, in 0 e π, nel periodo $[0, 2\pi)$, e quindi in tutti i punti che si ottengono traslando questi di multipli interi del periodo: $x_k = k(2\pi)$ e $x_k = \pi + k(2\pi)$, con k intero qualsiasi;

iv) è convessa in $[\pi/2, 3\pi/2]$ e quindi in tutti gli intervalli che si ottengono traslandolo di multipli interi di 2π; nei restanti intervalli è concava. Ne consegue che tutti i punti $x_k = \pi/2 + k\pi$ sono punti di *flesso*;

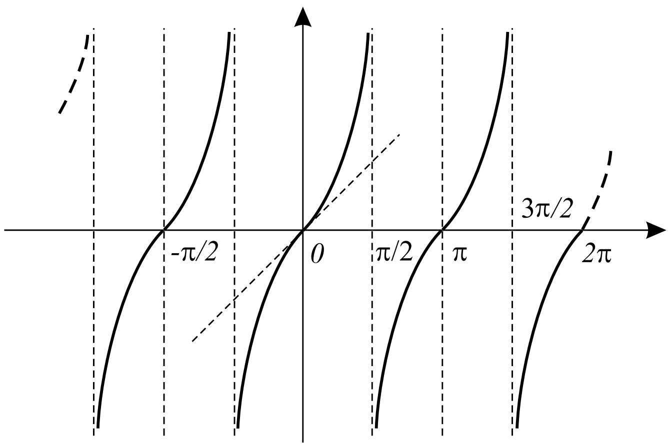
v) è strettamente decrescente in $[0, \pi]$ e quindi in tutti gli intervalli che si ottengono traslandolo di multipli interi di 2π; nei restanti intervalli è strettamente crescente.

Si osservi che il grafico della funzione coseno si può ottenere da quello della funzione seno traslando orizzontalmente quest'ultimo di $-\pi/2$: vale quindi la relazione $\cos x = \sin(x + \pi/2)$; inoltre, dalla figura 16, si vede che il grafico del coseno è simmetrico rispetto al punto del piano $(\pi/2, 0)$; quindi in tutti i punti α e β simmetrici rispetto a $\pi/2$, ovvero tali che $\alpha + \beta = \pi$, si ha: $\cos\alpha = -\cos\beta = -\cos(\pi - \alpha)$.

Infine, è utile conoscere la seguente importante identità che lega le due funzioni: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Considerando il rapporto fra la funzione seno e la funzione coseno, definito in ogni punto diverso da $\pi/2 + k\pi$ (zeri del coseno), si ottiene una nuova funzione periodica chiamata *tangente*: $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\} \longrightarrow \mathbb{R}$, con

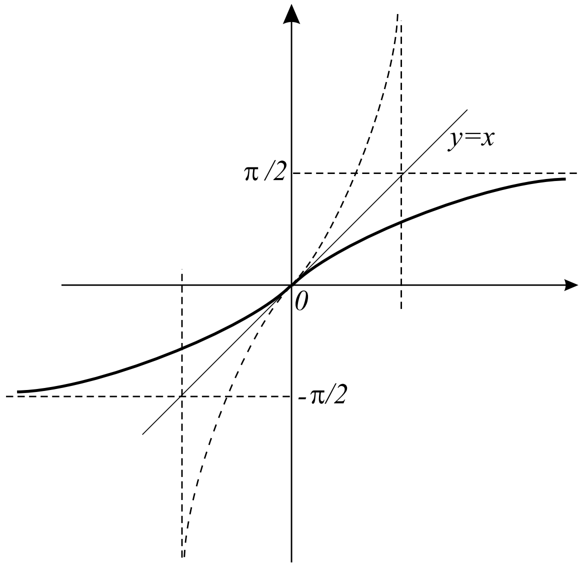
$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Il suo grafico è il seguente



Da esso si osserva che la funzione tangente:

i) è periodica con periodo uguale a π;
ii) è dispari, in quanto rapporto fra una funzione dispari e una pari;
iii) ha gli stessi zeri della funzione seno e ha asintoti verticali negli zeri del coseno;
iv) è suriettiva, in quanto l'insieme immagine coincide con $\mathbb{R}$; inoltre, è strettamente crescente nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ e quindi in tutti gli intervalli da esso ottenuti per traslazione di un qualsiasi multiplo intero del periodo, mentre è strettamente decrescente nei restanti intervalli;
v) è convessa in $[0, \pi/2)$ e quindi in tutti gli intervalli da esso ottenuti per traslazione di un qualsiasi multiplo intero del periodo, mentre è concava nei restanti intervalli;
vi) ha tangente di equazione $y = x$ nell'origine.

Le funzioni seno, coseno, tangente, così come tutte le funzioni periodiche, non sono invertibili in quanto non iniettive; tuttavia, considerando la loro restrizioni ad un intervallo su cui sono strettamente monotone, è possibile definire le inverse di tali restrizioni. Convenzionalmente, per la funzione seno si considera la restrizione all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$, per la funzione coseno all'intervallo $[0, \pi]$ e per la funzione tangente si considera la restrizione all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$. Le inverse delle funzioni seno, coseno e tangente *ristrette agli intervalli suddetti* vengono indicate con i simboli: arcsin, *arccos* e arctan (a volte, con abuso di scrittura, anche con $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ e $\tan^{-1}$). In particolare, per la funzione *arcotangente* si ottiene, dal grafico della tangente con la usuale simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, il seguente grafico

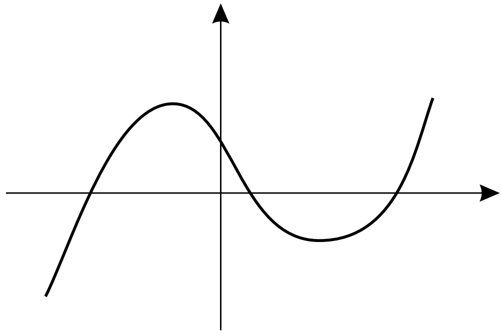


dal quale si osserva che tale funzione:

i) è dispari;
ii) è limitata, avendo insieme immagine $(-\pi/2, \pi/2)$, non ha massimo e minimo, in quanto l'estremo superiore $\pi/2$ e l'estremo inferiore $-\pi/2$ non appartengono all'immagine;
iii) ha asintoti orizzontali di equazione $y = \pi/2$, per $x \to +\infty$, e $y = -\pi/2$, per $x \to -\infty$;
iv) è convessa in $[0, +\infty)$, concava in $(-\infty, 0]$ e ha quindi un punto di flesso nell'origine; in tale punto la tangente al grafico ha equazione $y = x$.

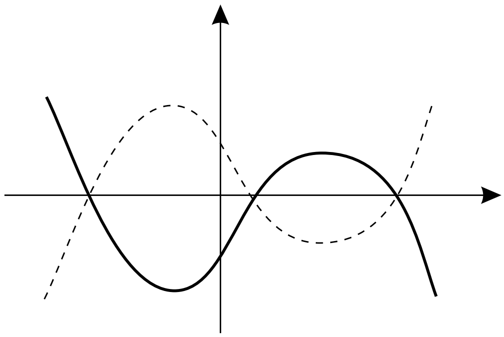
1.5 Grafici deducibili da quello noto di una funzione

Supponiamo che la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ abbia, ad esempio, il grafico qui riportato;

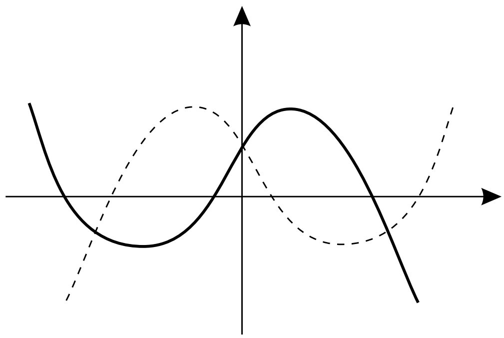


è possibile ricavare, con semplici trasformazioni, il grafico della funzione $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come segue:

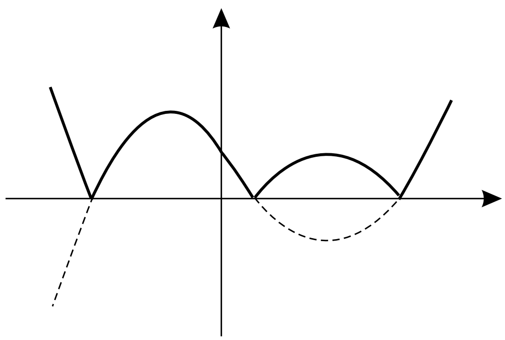
i) $g(x) = -f(x)$: il grafico di g si ottiene operando una simmetria assiale del grafico di f rispetto all'asse delle ascisse, come si vede nella seguente figura;



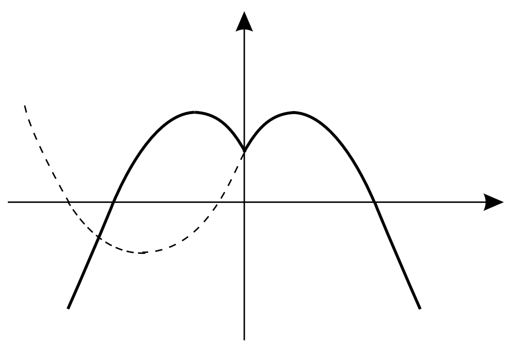
ii) $g(x) = f(-x)$: il grafico di g si ottiene operando una simmetria assiale del grafico di f rispetto all'asse delle ordinate, come si vede nella seguente figura



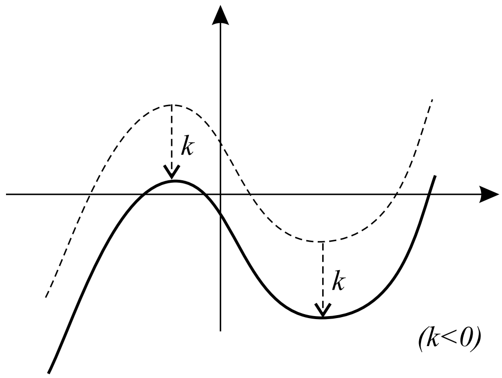
iii) $g(x) = |f(x)|$: ricordando che il modulo di un numero reale è il numero stesso, se esso è non negativo, ed è invece il suo opposto, se esso è negativo, il grafico di g si ottiene operando una simmetria assiale rispetto all'asse delle ascisse delle parti del grafico di f che sono al di sotto di tale asse, e lasciando inalterate le altre, come riportato nel seguente grafico



iv) $g(x) = f(|x|)$: poiché g è una funzione pari ($f(|-x|) = f(|x|)$, il grafico di g è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate; inoltre, sull'intervallo $[0, +\infty)$ i grafici di f e g coincidono, in quanto $|x| = x$, per ogni x non negativo. Si ottiene così il seguente grafico



v) $g(x) = f(x) + k$, con k reale qualsiasi: il grafico di g si ottiene traslando di k quello di f, nella direzione dell'asse delle ordinate come si vede nella figura seguente



vi) $g(x) = f(x + k)$, con k reale qualsiasi: osservando che l'immagine di x tramite la funzione g si ottiene prendendo l'immagine del punto $x + k$ della funzione f, il grafico di g si ottiene traslando di $-k$ nella direzione dell'asse delle ascisse quello di f, come si vede nella figura seguente